

低密度校验码 BP 译码算法中量化问题的研究

孙韶辉, 孙蓉, 王新梅

(西安电子科技大学综合业务网国家重点实验室, 陕西西安 710071)

摘要: 本文对低密度校验(LDPC)码 BP译码算法的量化问题(主要是接收比特信号和中间变量)进行了研究,着重讨论了量化范围、量化级数、均匀和非均匀量化等因素对译码性能的影响,给出了LDPC码BP译码算法的一些实用性的结论.并进一步发现在对BP译码算法的中间变量进行高阶量化处理时,在高信噪比的情况下,能明显地减小译码的误码率,降低译码算法的错误平层,提高译码性能.

关键词: LDPC码; BP算法; 量化; 非均匀量化; 误码率

中图分类号: TN911.22 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2003)02-0217-04

Some Quantization Issues for Decoding of Low-Density Parity Check Codes with BP Algorithm

SUN Shao-hui, SUN Rong, WANG Xin-mei

(National Key Lab of Integrated Service Networks, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: The quantization scheme for the iterative belief propagation (BP) algorithm of low-density parity-check (LDPC) codes is studied. The effects of the bound, resolution, and other parameters for uniform and nonuniform quantization schemes are discussed. Good performance of decoding under properly designed quantization can be obtained as shown by simulations. Furthermore, we found that the quantization of high order for the mid-variables of BP decoding algorithm can improve the performance and reduce the error floor of LDPC codes at regions of high signal-to-noise ratio.

Key words: LDPC codes; belief propagation; quantization; nonuniform quantization; bit error rate

1 引言

1962年Gallager提出了基于稀疏校验矩阵的线性码,即低密度校验(LDPC)码^[1],证明了LDPC码是一种好码,并给出了一种简单有效的迭代译码算法.1993年Berrou等提出的Turbo码,经研究发现其实就是一种LDPC码^[2].1996年,MacKay和Neal的进一步研究表明:采用LDPC长码可以达到Turbo码的性能^[3,4].最近的研究表明在非规则图上构造的LDPC长码性能已非常地接近香农限^[5].目前LDPC码的译码方法主要采用的是MacKay和Neal提出的BP(Belief Propagation)迭代译码算法,BP算法采用了外信息迭代的方法来译码,获得了很好的译码性能^[3,4].

LDPC码的实际应用,必须考虑其硬件实现所引起的量化问题.本文主要针对LDPC码BP译码算法的量化性能进行了分析和讨论,对接收信号以及算法的中间变量进行了量化处理,分析了量化方法、量化取值范围、量化等级划分等因素对译码性能的影响.我们在研究中发现:在对BP译码算法的中间变量进行高阶量化处理时,高信噪比情况下,能显著地减小译码的误码率,降低译码算法的错误平层,提高译码性能.

2 BP译码算法原理

LDPC码是一种基于稀疏校验矩阵的线性码.设码长为 N ,信息位为 K ,校验位为 $M = N - K$,则码校验矩阵 H 是一个 $M \times N$ 阶的矩阵; H 矩阵用二部图表示时,图的左边有 N 个节点,每个节点表示码字的一个比特位;右边有 M 个节点,每个节点表示码字的一个校验集;与校验矩阵中“1”元素相对应的左右两个节点之间存在连接边,我们将这条边两端的节点称为相邻节点.每个节点相连的边数,称为该节点的度数.对于规则LDPC码,其校验矩阵中每一行和每一列中“1”的个数是相同的;对应的二部图中,左边节点度数和右边节点度数分别对应着一个固定值.我们把规则LDPC码简称为规则码,通常用 (N, j, k) 表示,其中 N 表示码长, j 表示校验矩阵 H 每列中“1”的个数, k 表示校验矩阵 H 每行中“1”的个数;在二部图上表现为左边节点度数为 j ,右边节点度数为 k .相对于规则码,还有一种非规则LDPC码,非规则LDPC码的二部图中左右节点的度数都不是一个固定的值,它们分别服从一对矢量 (i_1, \dots, i_m) 和 (j_1, \dots, j_d) ,其中 i_i 是二部图中左度数为 i_i 的节点的边占总边数比例, j_j 是图中右度数为 j_j 的节点

的边占总边数比例, m 和 d 分别表示左边和右边节点中最大的度数. 研究表明, 经过优化度序列矢量和后, 非规则 LDPC 码的性能要好于规则的 LDPC 码^[9,10], 我们把非规则 LDPC 码简称为非规则码.

图 1 展示了 LDPC 码的有向二部图, 其中父亲节点 x 为码字节点, 孩子节点 z 为校验节点. 译码采用基于该图的 BP 迭代算法. 译码过程中, 节点 x_n 向其相连的所有孩子节点 z_m 发送消息 Q_{nm}^a , 通知 z_m 节点 x_n 处于状态 a 的概率, 用于更新节点 z_m 上的消息 R_{mn}^a 的值. 然后, 节点 z_m 向父亲节点 x_n 发送已更新的消息 R_{mn}^a , 通知它满足时节点 x_n 应该处的状态. 一个更新轮回后, 产生一个估计码字 \hat{x} , 如果满足 $H\hat{x} = 0$, 则译码成功; 否则迭代上述过程. 如果迭代次数达到设定的最大迭代次数 (例如 200 次), 还未找到满足校验的估计码字, 则译码失败.

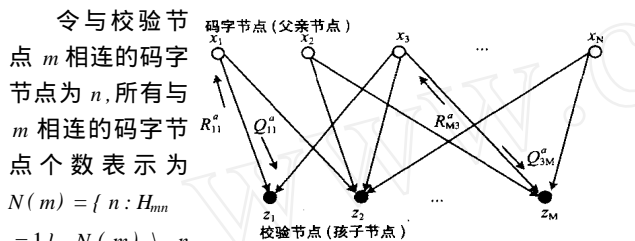


图 1 二部图上的 BP 译码算法

令与校验节点 m 相连的码字节点为 n , 所有与 m 相连的码字节点个数表示为 $N(m) = \{n : H_{mn} = 1\}$, $N(m) \setminus n$ 表示除 n 外的与 m 相连的码字节点个数. 同理, 所有与码字节点 n 相连的校验节点个数表示为 $M(n) = \{m : H_{mn} = 1\}$, $M(n) \setminus m$ 表示除 m 外的与 n 相连的校验节点个数. 接收到的码字为 $x = [x_n]$, 则译码的具体过程为^[4,6]:

① 初始化: 根据接收值 x_n 计算其为 0、1 的概率 q_{nm}^0 和 q_{nm}^1 作为初始值分别赋予 f_n^0 和 f_n^1 .

② 迭代过程:

步骤 1: 当接收到信息 $x = 0, 1$, 对于每个节点 m 和 n ,

设 $q_{nm} = q_{nm}^0 - q_{nm}^1$, 计算

$$r_{mn} = \prod_{n \in N(m) \setminus n} q_n \quad (1)$$

$$= \frac{r_{mn}^1}{r_{mn}^0} = \frac{1 - r_{mn}}{1 + r_{mn}} \quad (2)$$

其中 r_{mn} 是检验节点 m 的概率似然比值.

步骤 2: 当接收到信息 $x = 0, 1$, 对于每个节点 n 和 m , 更新

$$= \frac{q_{nm}^1}{q_{nm}^0} = \frac{f_n^1 \prod_{m \in M(n) \setminus m} r_{m,n}^1}{f_n^0 \prod_{m \in M(n) \setminus m} r_{m,n}^0} \quad (3)$$

$$q_{nm} = q_{nm}^0 - q_{nm}^1 = \frac{2}{1 + r_{nm}} - 1 \quad (4)$$

其中 r_{nm} 是码字节点 n 为 1 和 0 的概率比值.

步骤 3: 对迭代值进行判断, 设 $\hat{x}_n = [x_n]$, 当 $\hat{x}_n > 1$, 使 $\hat{x}_n = 1$; 当 $\hat{x}_n < -1$, 使 $\hat{x}_n = 0$.

如果 $H\hat{x} = 0$, 则迭代译码过程停止, 译码值 \hat{x} 是一个码字. 否则回到步骤 1 重复执行, 如果迭代次数超过了所设定的

最大迭代次数还没有出现一个合法的码字则译码失败.

3 BP 译码算法的量化性能和分析

为了将 LDPC 码的 BP 译码算法应用于硬件实现中, 根据第 2 节的介绍, 我们对接收比特 x 、BP 算法的中间变量 q_{nm} 、 r_{mn} 以及 f_n 和 r_{mn} 进行量化处理、分析, 讨论这些量化情况对译码性能的影响. 仿真中, 我们针对 AWGN 信道, 码长分别为 $N = 1024$ 和 384 的规则 LDPC 码进行量化仿真. 构造规则码时, 消除了 H 矩阵中的环 4 的影响^[4], 并将译码的最大迭代次数设定为 200 次. 虽然仿真对象是规则码, 由于是讨论 BP 算法, 所以结论对非规则码也大致相同.

3.1 接收信号的量化分析

对于接收信号, 其量化特性主要由量化范围与量化级数大小决定. 信号被编码和 BPSK 调制后, 经过 AWGN 信道, 到达译码器. 信号经过 BPSK 调制后为 s_k , 其取值为 $-1, +1$. 假设信号服从等概二项分布, 即 $p(s_k = +1) = p(s_k = -1) = 0.5$. 噪声的分布为 $N(0, \sigma^2)$, 译码器接收比特为 $x_k = s_k + n_k$. x_k 的分布与噪声 n_k 的方差有关 (可与 SNR 呈映射关系). 因此在量化中可以采用正态分布的“3-σ 原则”, 根据信噪比 (SNR) 来确定接收比特的量化范围, 从而达到提高量化精度的目的. 在对接收比特信号的量化处理中, 我们采用了两种方式: 方式一, 量化级数固定, 量化范围可变; 方式二, 量化范围固定, 量化级数可变; 来分析接收比特量化的影响. 在仿真中, 我们采用了码长 $N = 1024$, 码率 $R = 1/2$ 的规则码. 经过仿真和理论分析表明, 当选取合适的量化级数 (如量化比特数为 6) 的情况下, 量化范围从 $(-3 \rightarrow +3)$ 到 $(-5 \rightarrow +5)$ 变化时, 对接收比特进行量化处理对 BP 算法的译码性能几乎没有影响; 而当选取合适的量化范围, 量化级数发生变化时, 会对 BP 算法的性能造成一定的影响. 图 2 给出了对接收比特量化与无量化处理的译码性能对比, 其中, 量化范围为 $(-3 \rightarrow +3)$, 量化比特数为 3、4、6, 非均匀量化为 $\mu = 100$ 的对数量化.

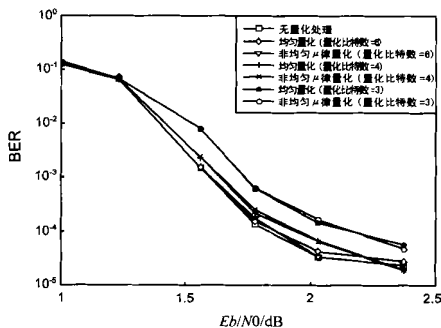


图 2 $N = 1024, R = 1/2$ 规则码, 无量化处理和接收比特进行均匀量化及 μ 律量化 (量化比特变化) 的性能对比 (量化范围 = $-3 \rightarrow +3$)

根据前面的分析, 可以得到以下结论:

(1) 当量化级数一定 (合适的量化比特) 的情况下, 只要取合适的量化范围, 则接收比特的量化对译码性能几乎没有影响.

(2) 当量化范围取合适的值, 量化级数对译码的性能有较

大的影响,量化级数还是相对大一点好(至少量化比特数为 4,量化级数等于 16),但随着级数的增加,量化级数的影响力变弱,所以应该选合适的值,而不必太大。

(3)对于接收比特的量化,采用非均匀量化(μ 律量化)和均匀量化对译码性能的影响几乎是相同的,考虑到均匀量化的实现较为简单,所以建议采用均匀量化方式。

3.2 中间变量 q_{nm} 和 r_{mn} 的量化分析

从公式(1)和(4)知道, q_{nm} 和 r_{mn} 是 BP 算法的两个中间变量,用于计算码字节点的概率比和校验节点的似然比,其取值范围为 $[-1, +1]$,因此 q_{nm} 和 r_{mn} 的量化范围是确定的,只须比较量化级数对译码性能的影响。

在码长 $N = 384$, 码率 $R = 1/2$ 规则码的仿真中,对 q_{nm} 、 r_{mn} 采用了量化比特分别为 4、6、10 的 μ 律量化和均匀量化,并与无量化的情况进行比较,结果如图 3 所示。可以看到,与无量化对比, μ 律量化在量化比特为 4 时译码性能有较大的损失,译码错误平层较高;量化比特数的增加(如 6 或者 10),能较大改善译码性能。此外,均匀量化的译码性能比 μ 律量化的性能好。如量化比特为 6 时,均匀量化的译码性能比 μ 律量化明显好。我们发现,高信噪比时 q_{nm} 和 r_{mn} 的取值大部分位于 $[-1, -0.5]$ 和 $[+0.5, +1]$ 之间,而在 $[-0.5, +0.5]$ 区间出现较少,因此均匀量化要比 μ 律量化好。

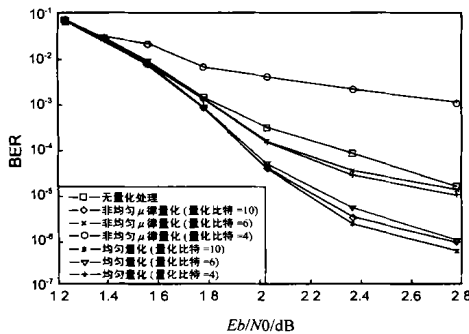


图 3 $N = 384, R = 1/2$ 规则码,无量化处理和对中间变量 q_{nm} 和 r_{mn} 进行 μ 律量化及均匀量化的误比特率对比

由图 3 还发现,在高阶量化时,采用 μ 律量化和均匀量化 q_{nm} 、 r_{mn} 得到的误比特率性能都比无量化处理好的多,如量化比特为 10 时, μ 律量化、均匀量化与无量化处理相比,误码率为 10^{-5} 时可获得大约 0.7 - 0.8dB 的增益,大大地降低译码错误平层。对多种码长、码率和量化级数的情况也进行了类似的仿真,仍然出现相同的情况:量化处理不仅没有引起译码性能的恶化,反而提高了译码性能。同时,我们比较了无量化和量化处理后的译码分组错误率;发现高信噪比时,尽管无量化处理的误比特率比高阶量化时大,但是其分组错误率却更小。这就是说,无量化的错误分组中误比特数比采用高阶量化时大。表 1 统计了译码迭代次数 200 时无量化和高阶量化下错误分组中的平均误比特数。无量化时,随着信噪比的增大,错误分组中的平均误比特数在增加,并趋近于 50% 的错误率;高阶量化时,随着信噪比的增大,平均错误个数却在减少。

图 4 是译码算法在信噪比为 2.0dB 时,分别采用无量化处理和

表 1 LDPC 码在无量化处理和对 q_{nm} 、 r_{mn} 进行量化时错误分组中平均错误个数对比 ($N = 384, R = 1/2$)

信噪比/dB	1.56	1.78	2.0	2.37	2.78
无量化方式	16.5	21.1	50.4	78.73	92
10 比特 μ 律量化	14.8	11.3	6.7	2.5	2.3
6 比特 μ 律量化	13.5	9.32	4.36	2.13	1.23
10 比特均匀量化	14.8	13.7	7.81	2.5	2.35
6 比特均匀量化	14.64	11.96	5.49	2.09	1.8

我们针对同一分组中出现错误的信息位个数进行的统计分析。在迭代次数从 1 逐步增加到 200 的过程中,无量化处理的错误分组中误比特数由初始的 7 个,经过几次迭代译码后,迅速地增加到 96 左右,约占信息位个数的 50%,并一直在其附近振荡;而高阶量化时,误比特数则从 7 下降到 2 并一直保持着这个值。

根据上述研究可以得出,无量化下 BP 迭代算法在某些情况下(特别在高信噪比)出现的错误会使译码不能收敛于正确码字,译码错误逐渐地增大,误比特数趋于信息比特数的 50%,并在这个值附近振荡,因而其平均误比特数比较大;在高阶量化时,量化误差会导致错误分组数略有增加,但它使得 BP 译码算法不发生振荡,能够收敛于正确的码字,或者其错误比特数很小,从而降低了译码错误平层。

仔细地分析了这种现象,认为出现译码振荡主要是因为在无量化处理时,少量接近于“0”的微弱错误值,与其它较大的正确观察值组合在一起,使得那些具有中等正确观察值的码字节点的判决值在判决门限附近

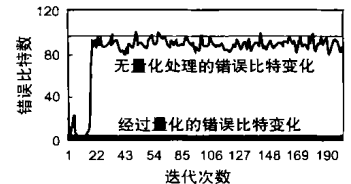


图 4 LDPC 码某一错误分组中信息位错误比特数随迭代次数变化情况 ($N = 384, R = 1/2$)

左右振荡,无法收敛,并造成错误传播;然而,量化后则不会出现这些微弱错误的值,因而能够收敛于正确的码字,或者不会导致错误扩散。

在对 BP 算法的中间变量 q_{nm} 和 r_{mn} 的量化仿真分析中,可以得到以下结论:

(1)中间变量 q_{nm} 和 r_{mn} 量化,采用均匀量化的译码性能好于非均匀量化的性能,而且均匀量化的实现较简单,所以建议采用均匀量化。

(2)对于 q_{nm} 和 r_{mn} 的量化,量化级数对译码的性能的影响较大,所以要选用较大的量化级数。在高信噪比情况下,高阶量化译码的误比特率比无量化处理时还小,降低了译码算法错误平层,改善 LDPC 码的译码性能。

3.3 变量 和 的量化分析

校验节点的似然比值和码字节点的概率比值是 BP 译码算法的两个重要的中间变量,其中 的值是否大于 1 被用于判断传输的比特是取 +1 还是 -1 (BPSK 调制)。对于 和 的量化,我们依然从量化范围和量化级数两个方面来分析。理论上, 和 的取值范围在 $(0, +)$ 之间,而实验发现

在译码过程中, q_{mn} 和 r_{mn} 的取值呈对数正态分布, 因此采用非均匀量化 (μ 律量化) 方法。

首先, 把 q_{mn} 和 r_{mn} 的 μ 律量化范围设为 $(0 \rightarrow 10)$ 到 $(0 \rightarrow 100)$ 变化。仿真分析表明, 当量化范围小于 $(0 \rightarrow 50)$ 时, 译码性能较差, 采用量化比特为 10, 量化范围为 $(0 \rightarrow 10)$ 对 q_{mn} 和 r_{mn} 进行 μ 律量化与无量化处理的性能比较, 在误码率为 10^{-4} 时, 性能相差大约 1.2dB, 并且其错误平层非常高, 而在 $(0 \rightarrow 50)$ 到 $(0 \rightarrow 100)$ 之间量化时, 性能得到很大改善; 当量化范围大于 $(0 \rightarrow 100)$ 后, 增加量化范围对提高译码性能帮助不大。同时, 我们对 q_{mn} 和 r_{mn} 采用均匀量化的性能进行了仿真, 发现均匀量化的性能要明显差于 μ 律量化。图 5 是 q_{mn} 和 r_{mn} 的 μ 律量化范围为 $(0 \rightarrow 100)$ 、量化比特数变化情况下与均匀量化及无量化处理的性能对比。

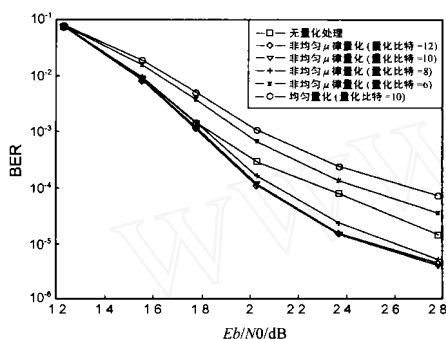


图 5 $N = 384$, $R = 1/2$ 规则码对变量 q_{mn} 、 r_{mn} 进行 μ 律量化与均匀量化及无量化处理的性能对比 (变量化比特数, 量化范围 $= 0 \rightarrow 100$)

通过 q_{mn} 和 r_{mn} 量化对译码性能影响的分析, 可以得到以下结论:

(1) q_{mn} 和 r_{mn} 的量化范围对译码性能有一定的影响, 要降低由于量化造成性能恶化的影响, q_{mn} 和 r_{mn} 须取较大的量化范围 (如大于 $(0 \rightarrow 50)$ 的量化范围)。

(2) 对 q_{mn} 和 r_{mn} 非均匀量化 (μ 律量化) 的译码性能要好于均匀量化 (在量化范围为 $(0 \rightarrow 100)$, 量化比特数为 10 (1024 级), 在误比特率为 10^{-4} 时, 信噪比相差大约 0.75dB)。

(3) 在高信噪比和高阶量化的情况下, 对 q_{mn} 和 r_{mn} 进行非均匀量化 (μ 律量化), 其译码误比特率要小于无量化处理的误比特率, 降低了错误平层, 改善了 BP 算法的译码性能。

4 总结

本文对 LDPC 码 BP 译码算法中主要参数进行了量化仿真、分析和讨论, 给出了量化方案对 BP 算法的译码性能影响。特别值得一提的是, 在高信噪比时, 无量化处理的 BP 译码算法会出现振荡现象, 无法让某些错误分组收敛于一个正确的码字, 随着迭代次数增加, 误比特数不断增加, 最后错误率在 50% 左右; 而采用合适的量化阶数及量化范围对中间变量

q_{mn} 、 r_{mn} 以及 q_{mn} 和 r_{mn} 量化后, 由于量化误差的引入恰好防止了译码振荡, 使得本来不收敛的错误分组能够正确收敛于一个码字或者是使错误分组的误比特数趋于很小。总体来说, 高信噪比时对中间变量 q_{mn} 、 r_{mn} 以及 q_{mn} 和 r_{mn} 的高阶量化, 可以

使 BP 译码算法的性能得到较大提高, 同时降低译码错误平层。这一结果不但对 LDPC 码硬件实现有意义, 并且对有关 BP 译码算法的应用领域也有重要的参考意义。

参考文献:

- [1] R G Gallager. Low density parity check codes[J]. IRE Trans on IT, 1962, 8(3): 208 - 220.
- [2] C Berrou, A Blavieux, P Thitimajshima. Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes[A]. In Proc. of 1993 IEEE International Conference on Communications[C]. Geneva, Switzerland: ICC, 1993, 1064 - 1070.
- [3] D J C Mac Kay, R M Neal. Near Shannon limit performance of low-density parity check codes[J]. Elect. Lett., 1996, 32: 1645 - 1646.
- [4] D J C Mac Kay. Good error correcting codes based on very sparse matrices[J]. IEEE Trans on IT, 1999, 45(2): 399 - 431.
- [5] T Richardson, R Urbanke. The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding[J]. IEEE Trans on IT, 2001, 47(2): 478 - 496.
- [6] M P C Rossorier, M Mihaljevic, Hideki Imai. Reduced complexity iterative decoding of low-density parity check codes based on belief propagation[J]. IEEE Trans on Com, 1999, 47(5): 673 - 680.
- [7] 孙蓉, 等. Turbo 码 MAP 译码算法中量化问题的研究[J]. 电子学报, 29(10): 1356 - 1359.
- [8] Rong Sun, Xinmei Wang, Ping Li. Nonuniform quantisation of mid-rariables for decoding of turbo codes [J]. IEE Electronics Letters, 2000, 36(16).
- [9] M Luby, M Mizenmacher, M A Shokrollahi, et al. Analysis of low density parity check codes using irregular graphs[A]. in Proc. of the 30th ACM Symposium on Theory of Computing[C]. Berlin: ACM, 1998, 249 - 258.
- [10] M Luby, M Mizenmacher, et al. Improved low density parity check codes using irregular graphs[J]. IEEE Trans on IT, 2001, 47(2): 585 - 598.

作者简介:



孙韶辉 男, 1972 年 4 月生于广东韶关市, 分别于 1994 年和 1999 年获西安电子科技大学学士和硕士学位, 现为该校通信与信息系博士研究生, 目前的研究兴趣包括信道编码/调制理论、信息论、通信网络与交换及无线通信方面。

孙蓉 1976 年 11 月生于陕西西安, 分别于 1998 年和 2001 年获西安电子科技大学学士和通信与电路系统硕士学位, 现在香港城市大学工作, 目前的研究兴趣包括信道编码/调制理论、信息论及数字通信系统。

王新梅 男, 1937 年生于浙江, 现为西安电子科技大学教授, 博士生导师, 研究兴趣包括: 信道编码, 信息论, 数学通信系统, 密码学等。